Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Letzte Folge: Die Konstruktion des isoperimetrischen Kreises

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu dieser Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises" als Beispiel für die Art und Weise, wie der menschliche Geist überhaupt zu neuen Erkenntnissen gelangt.

Nach unserer Exkursion in die „musikalische" Geometrie wollen wir uns noch einmal Nikolaus von Kues' Kreisuntersuchung zuwenden. Wir hatten das geometrische Paradoxon kennengelernt, wenn „Krummes" mit „Geradem" verglichen werden soll, und dabei erkannt, daß der Mensch zwar nicht auf „geradem" bzw. verstandesmäßigem (oder zahlenmäßig „linearem") Wege zum Begreifen der Unendlichkeit gelangt, sondern durch ein seinem Geist innewohnendes „lebendiges" Vermögen des „Vergleichens".

Was bedeutet dies für Nikolaus' Konstruktion des isoperimetrischen Kreises, wenn man versucht, diese bildlich darzustellen? Die bildliche Darstellung zeigt wiederum, daß der „rechnende" Verstand niemals genaueste Zahlenwerte erlangt, die Erkenntniskraft ihm aber vorauseilt und die Unendlichkeit erfassen kann.

Erinnern Sie sich an unsere Zeichnung des Dreiecks mit seinem In- und Umkreis? Nehmen Sie wieder ein konkretes Zahlenbeispiel — sagen wir einen Umfang von 30 cm. Dann ist eine Dreieckseite 10 cm lang. Am besten konstruieren Sie gleich auch das zum Dreieck umfangsgleiche Viereck (Seitenlänge 7,5 cm) mit seinem In- und Umkreis um den gleichen Mittelpunkt, denn wir werden es später noch brauchen (siehe *Abbildung 1*).

Wir hatten in den letzten Folgen festgestellt, daß die Inkreise der Vielecke mit steigender Seitenzahl immer größer, die Umkreise dagegen immer kleiner werden, und daß sie irgendwo zusammenfallen und eins werden. Die Frage war nur: *wo?* bzw. *wann?*. Der Verstand sagt uns bei diesen Fragen immer: „Das ist nicht genau zu erklären, das kann man nicht begreifen, also sparen wir uns die Mühe...". Doch der Geist oder unsere Erkenntniskraft will es *doch* versuchen, die Stufe zu immer größerer Einsicht zu erklimmen, immer näher an die letztendliche *Wahrheit* zu gelangen.

Daß wir dies können, zeigt uns die Erforschung der Naturkonstanten, denn dadurch erreichen wir nicht nur einen immer größeren Einblick in Gesetze der Naturprozesse, sondern erfahren auch, welch große *Freiheit des Denkens* der Mensch sich durch seine eigene Erkenntnis schaffen kann. Die Lösung von Paradoxa gelingt allerdings nur, wenn man das Umfeld dieses Paradoxons immer sorgfältiger untersucht und die dem Problem zugrundeliegende *Geometrie* erkundet.

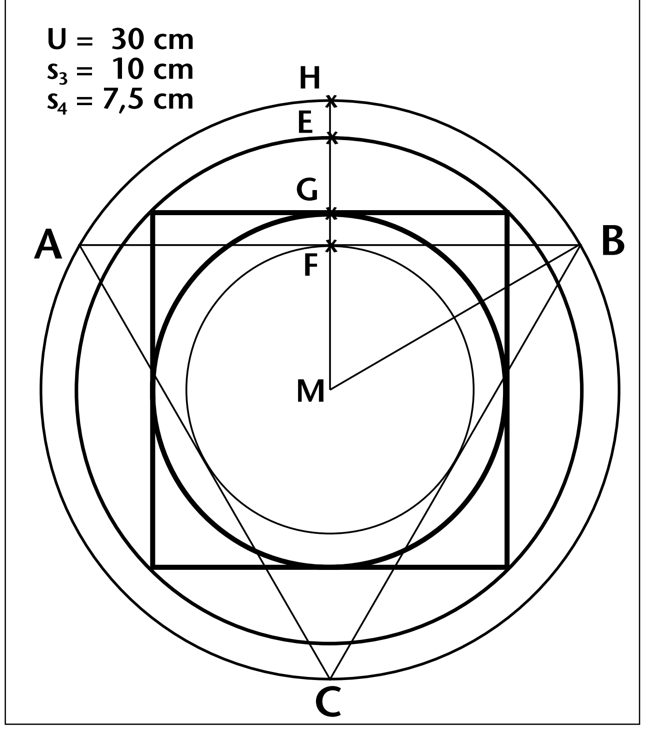
Die Entdeckung des Nikolaus von Kues bedeutete eine Revolution für den menschlichen Geist. Das *Unendliche* war greifbar geworden. Archimedes hatte – nachdem er eine Methode konstruiert hatte, wie man riesige Schiffe vom Uferplatz ins Wasser bewegen kann – gegenüber dem in Bewunderung staunenden König Hieron hybristisch erklärt: „Gib mir einen Standpunkt außerhalb der Erde und ich werde dieselbe in Bewegung setzen!"

Und der Cusaner erkannte, der Mensch ist ein Gott, zwar ein menschlicher, aber doch ein Gott, was soviel bedeutet wie: Sein Geist ist in einem ständigen schöpferischen Prozeß begriffen, und er kann durch seine wachsende Erkenntniskraft nach und nach alle Paradoxa des Universums lösen.

Betrachten wir noch einmal den Weg des „Vergleichens" zwischen den In- und Umkreisen, den Nikolaus vorgeschlagen hatte:

„Wir gehen hier von der Überlegung aus, daß Dreieck und Kreis von der Fläche her Extreme bilden. (Die Fläche der Vielecke wird mit steigender Seitenzahl immer größer und erreicht im isoperimetrischen Kreis ein Maximum, C.H.). Im Gegensatz zum Kreis, wo Inkreis und Umkreis zusammenfallen, weichen im Dreieck Inkreis- und Umkreishalbmesser (Radius) am stärksten voneinander ab. Dort ist der Umkreishalbmesser am größten, der Inkreishalbmesser am kleinsten, und ihre Summe ist am kleinsten; umgekehrt ist die Summe im Kreis gleich dem Kreisdurchmesser und am größten. Deshalb wissen wir, daß alle dazwischen liegenden umfangsgleichen regelmäßigen Vielecke entsprechend ihrer Fläche in jenen Strecken sich der Gleichheit mit dem Kreishalbmesser nähern. Wenn also eine Größe bezeichnet wird als Überschuß des Kreishalbmessers über den Inkreishalbmesser im Dreieck, und eine andere Größe, um die der Kreishalbmesser kleiner ist als der Umkreishalbmesser am Dreieck, dann wird sich jedes dazwischenliegende Vieleck entsprechend seiner Fläche im Überschuß seines Inkreishalbmessers über den des Dreiecks und im Unterschied zwischen seinem Umkreishalbmesser und dem des Dreiecks proportional verhalten. Denn da sich jene Größen verändern, weil die Flächen verschieden groß sind, kann ihr Verhältnis kein anderes sein als das Verhältnis der Flächen." („De Quadratura Circuli", *Von der Kreisquadratur*)

Abbildung 1:



Genauer ausgedrückt heißt dies: Das Verhältnis zwischen dem „Unterschuß" (dem „Weniger") des Vierecks-Umkreisradius unter dem des Dreiecks auf der einen, und dem „Überschuß" des Vierecks-Inkreisradius über den des Dreiecks ist das gleiche wie das Verhältnis zwischen „Unterschuß" von Umkreisradius des Kreises unter dem des Dreiecks zum „Überschuß" des Inkreisradius des Kreises über den des Dreiecks. Da Umkreis- und Inkreisradius beim umfangsgleichen Kreis aber in eins zusammenfallen, können wir diese Verhältnisse folgendermaßen darstellen:

$(r_3 - r_4) : (\varsigma_4 - \varsigma_3)$ ist also das gleiche wie:

$(r_3 - r_{iso}) : (\varsigma_{iso} - \varsigma_3)$,

wobei wir bedenken müssen, daß $r_{iso} = \varsigma_{iso}$ ist.

Wenn wir die Verhältnisse nun nach r_{iso} auflösen – denn wir wollen ja das Verhältnis U/d finden –, erhalten wir für r_{iso}:

$$r_{iso} = \frac{\varsigma_3 \, (2\, \varsigma_4 - r_4)}{\varsigma_3 + \varsigma_4 - r_4}$$

Diese Verhältnisse wollen wir nun in einer Zeichnung darstellen, weil man ihre Bedeutung dann viel klarer erkennen kann. In dieser Zeichnung sollten Sie alle tatsächlichen Längen und Abstände der ersten Abbildung benutzen (siehe *Abbildung 2*):

Wir zeichnen eine vertikale Linie, an deren Fuß wir den Mittelpunkt M unseres Dreiecks und Vierecks (bzw. aller In- und Umkreise) markieren und von M aus nach rechts eine Waagerechte ziehen. Die Waagerechte kann so lang sein, wie Sie wollen. Dann tragen wir oberhalb von M auf der Vertikalen den Punkt F ein, dessen Abstand von M genau die Länge des Dreiecks-Inkreisradius beträgt. Oberhalb von F tragen wir auch den Punkt H ein, der von M aus einen Abstand der Länge des Dreiecks-Umkreisradius hat, so daß der Abstand zwischen F und H genau die Differenz zwischen Umkreis- und Inkreisradius des Dreiecks darstellt.

Von F und H aus ziehen wir nun jeweils parallel zur unteren Waagerechten zwei weitere waagerechte Linien von unbestimmter Länge. Nun betrachten wir das Viereck in unserer ersten Abbildung: Der Abstand MN auf der Waagerechten ist der „Überschuß" des Inkreisradius des Vierecks über den des Dreiecks. Auf dem Punkt N errichten wir nun eine Vertikale parallel zur Strecke MH. Diese Vertikale schneidet die beiden Waagerechten, die von F und H ausgehen. Auf dieser Vertikalen tragen wir nun folgende Punkte ein:

• den Punkt G, wobei der Abstand NG die Länge des Vierecks-Inkreisradius hat,

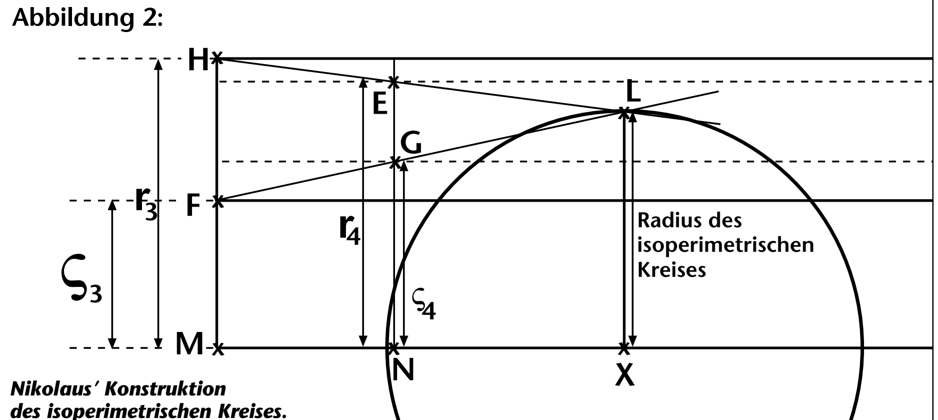
• und den Punkt E, der von N aus einen Abstand von der Länge des Vierecks-Umkreisradius hat.

Wenn Sie nun die *Abbildung 2* genau betrachten, können Sie erkennen, daß das Stückchen zwischen E und der obersten Waagerechten den „Unterschied" zwischen den Umkreisradien von Dreieck und Viereck ausmacht, das Stückchen zwischen G und der mittleren Waagerechten dagegen den „Überschuß" des Vierecks-Inkreises über den des Dreiecks.

Wenn Sie jetzt von H aus eine Diagonale durch E zeichnen, und eine weitere Diagonale von F durch G, dann werden sich diese beiden Diagonalen irgendwo schneiden, und diesen Punkt wollen wir L nennen. Durch L zeichnen wir nun parallel zu unserer ersten Vertikalen MH eine neue Vertikale und nennen den Punkt, wo sie auf die unterste Waagerechte trifft, X. Der Abstand zwischen X und L aber ist der gesuchte Radius des isoperimetrischen Kreises. In ihm fallen In- und Umkreisradius zusammen.

Diese geometrische Konstruktion des isoperimetrischen Kreises durch Nikolaus ist verblüffend einfach, nicht wahr? Wenn wir hingegen den Zahlenwert für $\pi = U/2r$ durch Einsetzen unserer eben ermittelten Werte der Inkreis- und Umkreisradien in die Gleichung der Verhältnisse ermitteln wollten, so wäre dies alles sehr viel komplizierter und vor allem... viel ungenauer. Es zeigt sich erneut, der rein zahlenmäßige Verstand kommt im „unendlichen" Prozeß der Wahrheitssuche nie zuende. Selbst wenn Sie einen Taschenrechner mit 20 Stellen hinter dem Komma hätten, würden Sie immer noch nicht die „endgültige" Wahrheit über π gefunden haben...!

Abbildung 2:



Nikolaus' Konstruktion des isoperimetrischen Kreises. *Die beiden Linien von F durch G und von H durch E schneiden sich im Punkt L. MF ist der Inkreisradius, MH der Umkreisradius des Dreiecks. NG ist der Inkreisradius des Vierecks, NE dessen Umkreisradius. Und ganz gleich, in welchem Anstand N von M eingezeichnet wird, für XL ergibt sich immer die gleiche Länge: der Radius des isoperimetrischen Kreises.*

Wir haben jedenfalls gesehen, daß der Mensch sich immer nur durch „Vermutungen" oder Hypothesen der Wahrheit nähern kann – und zwar jeder Mensch in dem ihm von seinem Geist gegebenen möglichen Grade. Dazu sagt Nikolaus von Kues: „Die verschiedenen Grade der Teilhabe an der Wahrheit ergeben sich also aus der geringeren oder größeren Entfernung der Möglichkeit von ihrer Verwirklichung. Die Annäherung läßt sich aber nie bis zum Erreichen steigern. Und so bleiben die Lehren der Weisen Vermutungen. Die Vermutung ist eine positive Aussage, die an der Wahrheit selbst teilhat, aber in der Weise eines Andersseins. Wie die Sinne an der höheren Einheit der Vernunft erst ihr eigenes Anderssein erfahren und ihre Feststellungen dabei mit der Genauigkeit vergleichen, so daß sie als Vermutungen hervortreten, so stößt auch die Vernunft erst im Lichte der Einsicht auf ihr Anderssein und erkennt ihr Zurückbleiben hinter der Genauigkeit als Vermutung. Und schließlich auch die Einsicht selbst, als die der Verwirklichung nächste Möglichkeit, erkennt an der göttlichen Einheit mit Freude, daß ihre Fähigkeit der Vermutung die lichtvollste ist." (*Von den Vermutungen*)

Diese Vermutungen – auch Hypothesen genannt, weil sie jedem Experiment vorangehen –, haben uns geholfen, auf der Suche nach dem universellen „Charakteristikum" des Kreises einige der ihm innewohnenden Geheimnisse ans Licht zu bringen.

Eine interessante statistische Korrelation, die eine gewisse Gesetzmäßigkeit nahelegt, ist etwas anderes als ein echtes Naturgesetz, eine Naturkonstante oder ein allgemeines Charakteristikum unseres Universums. Der Unterschied liegt im Grade ihrer Wahrheit, und dieser Grad ist bei einer Konstanten wie dem Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser „absolut". Man kann auch sagen, ein solches Naturgesetz verrät eine gewisse „Absicht des Schöpfers". Über diese Absicht immer mehr herauszufinden, bleibt der immerwährende Antrieb eines jeglichen Weisen – ob Naturforscher, Philosoph oder Dichter.

Zum Schluß unserer Untersuchung des Paradoxons vom Vergleich zwischen dem „Krummen" und „Geraden" wollen wir auf Max Plancks Äußerung über die Bedeutung der Konstanten zurückkommen. Er selber entdeckte vor hundert Jahren eine ganz neue Konstante, das nach ihm benannte „Plancksche Wirkungsquantum". Bei aller Verwirrung, die seine Hypothese zur Energiequantelung verursachte, hielt er immer daran fest, daß es etwas absolut Gültiges, eben die Konstanten, im Universum gebe:

„Wenn wir in so zahlreichen Fällen die Wahrnehmung machen, daß große und wichtige Probleme bei der Nachprüfung sich als Scheinprobleme entpuppen, ja daß das Wort ‚Wirklichkeit' manchmal einen ganz verschiedenen Sinn hat, je nachdem der Standpunkt der Betrachtung gewählt wird, kommt dann nicht unsere wissenschaftliche Erkenntnis auf einen flachen Relativismus hinaus? Gibt es denn überhaupt kein gültiges Urteil, keine absolute Wirklichkeit, unabhängig von irgendeinem besonderen Standpunkt? Es wäre schlimm, wenn dem so wäre. Nein, wohl gibt es in der Wissenschaft auch absolut richtige und endgültige Sätze, ebenso wie es in der Ethik absolute Werte gibt, und, was die Hauptsache ist, gerade diese Sätze und diese Werte sind die wichtigsten und erstrebenswertesten von allen... Sie aufzufinden und alle physikalischen und chemischen Vorgänge auf sie zurückzuführen, kann man geradezu als das Endziel der wissenschaftlichen Forschung bezeichnen."