Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 6: Der „genaueste“ Weg zum isoperimetrischen Kreis

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises“ bzw. die Berechnung der für alle Kreise konstanten Beziehung zwischen ihrem Umfang und Durchmesser.

Letztes Mal haben wir uns, ausgehend vom Dreieck, die In- und Umkreise weiterer isoperimetrischer Vielecke angeschaut und uns gefragt, ob die Flächen dieser Vielecke wohl größer oder unter Umständen auch kleiner werden. Aus diesem Grunde betrachteten wir eingehend die Radien der Kreise und sahen durch Anwendung des Satzes von Pythagoras, daß die Inkreisradien ς_n sich den Umkreisradien r_n immer mehr annähern, aber stets kleiner als diese bleiben, während die Umkreisradien sich den Inkreisradien annähern, jedoch immer größer als diese bleiben. Diese Verhältnisse haben uns schon eine ganz interessante Vermutung verschafft: Denn wenn die Inkreise immer größer werden (aber immer kleiner als die Umkreise bleiben), die Umkreise aber immer kleiner werden (und dabei trotzdem immer größer als die Inkreise bleiben), dann würden an einem gewissen „Treffpunkt“ vermutlich beide im isoperimetrischen Kreis zusammenfallen, wo In- und Umkreisradius eins werden.

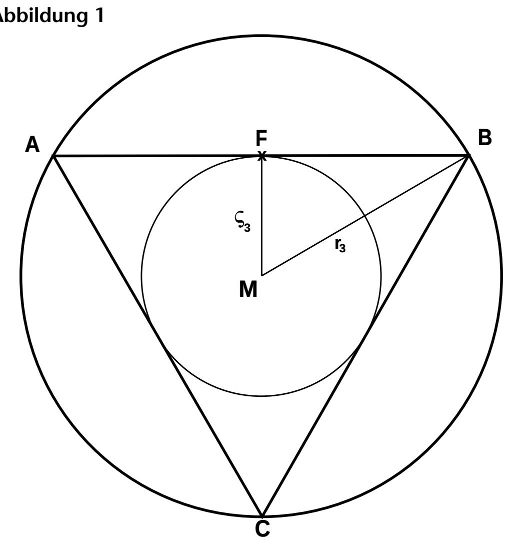
Doch der natürliche Verstand schreckt ein wenig davor zurück, diesen Treffpunkt, der ja erst nach einem „unendlichen“ Prozeß erreicht würde, tatsächlich als „wahr“ anzunehmen. Nikolaus hat dies immer wieder betont: Die Unendlichkeit ist nicht verstandesmäßig bzw. zahlenmäßig zu begreifen, dazu muß unsere *Erkenntniskraft* erweitert werden. Als Beispiel für diesen vielleicht etwas komplizierten Gedanken nehmen wir einmal den Kreis. Wie kann zum Beispiel ein Blinder begreifen, was ein Kreis ist? Wird er den Kreis genauso erfassen wie einer, der sehen kann? Der Cusaner erklärt diesen Unterschied zwischen dem sinnlich-verstandesmäßigen Verstehen auf der einen Seite und dem *erkenntnismäßigen* Begreifen der höchsten Idee auf der anderen folgendermaßen:

„So ist der Kreis, als ein Gegenstand der Vernunft, in seinem eigentlichen Sein nur in der Vernunft selbst erfaßt. Betrachtet Ihr nämlich die Figur, von deren Mittelpunkt zum Umfang alle Geraden gleich lang sind, so faßt Ihr in dieser Figur durch die Vernunft den Kreis als Gegenstand der Vernunft. Aber außerhalb der Vernunft selbst ist er eine mit den Sinnen wahrnehmbare Figur, also in einem ihm uneigentlichen Sein und daher nicht sein Sein selbst. Ein Kreis, dessen ursprüngliches Sein in der Vernunft ist, kann nicht außerhalb der Vernunft sein. Die sichtbare Kreisfigur nimmt zwar, trotz ihres Andersseins, an der Einheit des rationalen Seins des Kreises teil; aber die Genauigkeit des Kreis-Seins wird ihr dabei nicht mitgeteilt. Die Vervielfältigung jener Einheit geht nicht ohne Anderssein ab. Keine sichtbare Figur genügt der Bestimmung gleicher Länge aller Radien; und keine dieser Figuren kann der anderen in allem gleich sein. Keine Kreisfigur, so genau sie auch erscheinen mag, gibt es, der gegenüber nicht eine noch genauere möglich wäre. Da sich die Genauigkeit des Seins in der Vernunft nicht mitteilt, schließt alles Teilhaben daran notwendig Anderssein ein. Nicht weil das Mitteilende mangelhaft wäre, verhält sie die so, sondern weil das Teilhabende ein anderes ist.“ („De coniecturis“, *Über die Vermutungen*)

Betrachten wir nun noch einmal unser Dreieck ABC mit Inkreis und Umkreis (siehe *Abbildung 1*):

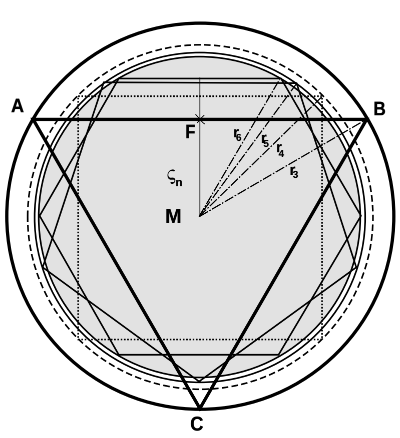
Wir hatten in einer der letzten Folgen eine interessante „Bewegung“ des Umkreisradius' kennengelernt. Wenn wir nämlich ausgehend von unserem Dreieck weitere isoperimetrische Vielecke um den gleichen Mittelpunkt zeichnen (*Abbildung 2*), dann bewegte sich der Umkreisradius von Eckpunkt B des Dreiecks immer mehr nach links in Richtung der Seitenmitte F. Der Umkreisradius r_3 schneidet die obere Dreieckseite ganz rechts im Punkt B, beim Viereck ist der Schnittpunkt von r_4 und der Dreieckseite schon ein ziemliches Stück nach links Richtung Seitenmittelpunkt F gerückt, beim Fünfeck noch ein Stück weiter und so fort.

Abbildung 1



Nikolaus betrachtete als erstes das Dreieck mit seinem In- und Umkreis. Hier ist schon der Punkt F, der Mittelpunkt der oberen Dreieckseite, markiert. Er ist für die Betrachtung der „Bewegung“ des Umkreisradius von Bedeutung.

Abbildung 2



Die Strecken, um die r jeweils nach links rückt, werden aber immer kürzer. In Anbetracht dieses Phänomens hat Nikolaus Cusanus nun einige Hypothesen aufgestellt:

Erstens vermutet er, daß diese „Bewegung“ des Umkreisradius — wenn man immer mehr und vieleckigere Vielecke zeichnet, bis im „Unendlichen“ Umkreis- und Inkreisradius zusammenfallen — zu genau dem Punkt führen muß, wo dieser Radius des gesuchten isoperimetrischen Kreises die betrachtete Dreieckseite schneidet.

Und zweitens vermutet der Cusaner, daß man nicht nur den Schnittpunkt dieses Radius, sondern auch den Radius selbst „genau“ ermitteln könne. Der Radius hört ja am Schnittpunkt mit der Dreieckseite nicht auf, sondern geht noch weiter bis zum isoperimetrischen Kreis. Man muß ihn also vom Schnittpunkt aus noch um ein gewisses Stückchen verlängern. Um die Länge dieses Stückchens und den Schnittpunkt aufzufinden, führt Nikolaus eine Betrachtung von Proportionalitäten durch, die wir nachher betrachten wollen.

Doch machen die kühnen Vermutungen des Cusaners uns nicht ziemlich stutzig? Was soll das bedeuten: Zuerst sollten wir einsehen, daß der Zusammenfall von Umkreis und Inkreis irgendwo im Unendlichen stattfindet, dann bemerkten wir, daß r_n mit wachsender Seitenzahl der Vielecke eine Bewegung vollführt, die ebenfalls irgendwo im Unendlichen enden soll, und angesichts dieser „unendlichen Geschichte“ sollen wir nun eine *bestimmte* Länge einer Strecke finden, die durch einen *bestimmten* Schnittpunkt hindurchführt?

Nun, das kann ganz schön verwirrend werden. Wenn Sie aber an Nikolaus' Gedanken über den Unterschied zwischen dem rein zahlenmäßigen Verstand und dem zu immer größerer Erkenntniskraft fähigen menschlichen (gottesähnlichen) Geist denken, dann ahnen Sie, worauf er hinauswill. Wie auch bei anderen „Paradoxa“, die uns im politischen Leben, bei der Betrachtung der Natur oder überhaupt bei Dingen begegnen, die uns vor ein großes „Warum?“ stellen, beginnt mit dem Paradoxon zugleich ein geistiger Prozeß. Auf der einen Seite versorgt uns der Verstand mit immer mehr Einzelinformationen zu dem betrachteten Bereich, so daß wir das „Umfeld“ sozusagen verstandesmäßig immer mehr umzingeln können; auf der anderen Seite versucht der erkennende Geist, eine Idee hinter der ganzen Sache zu entdecken, oder besser gesagt: Den höheren Sinn, den Grund, warum etwas *so* und nicht irgendwie anders ist. Und diese beiden Prozesse greifen beständig ineinander, bis die „Idee“ die *richtige* ist und der Verstand in Erwägung aller Umstände und Feinheiten zustimmend ausruft: Genau das ist es!

Bei unserer Untersuchung aller Umstände des unendlichen Prozesses, der zum isoperimetrischen Kreis führen soll, werden wir finden, daß die Idee des Nikolaus von Kues überaus nützlich ist und daß wir uns die Unendlichkeit tatsächlich „abkürzen“ und auf diese Weise doch richtig vorstellen können.

Nikolaus betrachtet nun die Dreieckseite AB mit dem Mittelpunkt F und überlegt: Wo kann wohl der Schnittpunkt des Radius des isoperimetrischen Kreises liegen? Betrachten wir dazu das Dreieck ABC und dessen obere Seite in *Abbildung 3*:

Nehmen wir einmal ganz willkürlich und versuchsweise an, der isoperimetrische Radius ginge durch einen Punkt nahe bei F — sagen wir G — und dieser Punkt sei von F genau 1/8 der Gesamtstrecke AB entfernt. Der Abstand zwischen G und B wäre dann genau 3/8 der Gesamtstrecke AB. Der Cusaner stellt nun folgende Überlegung an: Der gesuchte Radius müsse durch G in einem ebensolchen Verhältnis wie AB unterteilt werden. Deswegen verlängert er MG einmal um 1/8, ein andermal um 3/8 von MG. Bei Betrachtung dieser Proportionalitäten wird ersichtlich, daß G nicht der gesuchte Punkt sein kann, denn der Radius würde in beiden Fällen zu kurz ausfallen.

Sie können sich dies auch rechnerisch klarmachen: Dazu wählen Sie das konkrete Beispiel MB = 60 und MF = 30 (im gleichseitigen Dreieck ist der Inkreisradius halb so lang wie der Umkreisradius). Errechnen Sie nach dem Satz des Pythagoras zuerst die Dreieckseite AB:

$(AB/2)^2 + 30^2 = 60^2$
$AB^2/4 = 2700$
$AB = 2 \cdot \sqrt{2700}$

Dann ist der Abstand zwischen F und G ein Achtel von AB, nämlich $1/4 \cdot \sqrt{2700}$.

Bei Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck FMG erhält man für

$MG^2 = FG^2 + 30^2$
$= 2700/16 + 900$
$MG = \sqrt{2700/16 + 14400/16}$
$= \sqrt{17100/4}$

Verlängert man MG nun um 1/8 seiner Länge zu 9/8 des oben errechneten Werts, so erhält man für den Radius des mutmaßlichen isoperimetrischen Kreises

$r_{iso} = 9/32 \cdot \sqrt{17100}$

und für den Kreisdurchmesser die doppelte Länge, nämlich

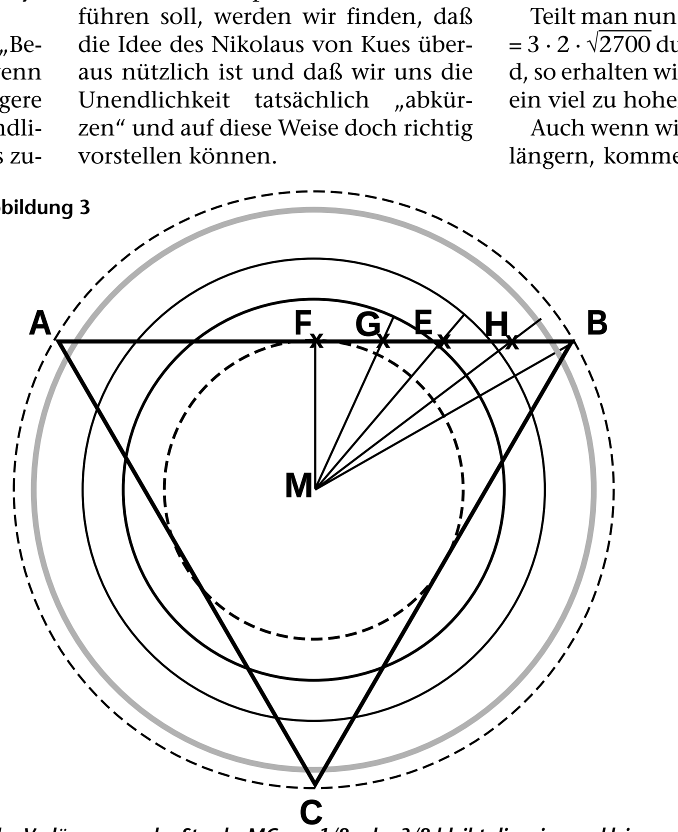
$d = 9/16 \cdot \sqrt{17100}.$

Teilt man nun den Umfang $U = 3$ AB $= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2700}$ durch den Durchmesser d, so erhalten wir 4,2385..., und das ist ein viel zu hoher Wert für π.

Auch wenn wir MG um 3/8 MG verlängern, kommen wir nicht zum Ziel (wie jeder leicht selbst ausrechnen kann). Aber jetzt wissen wir immerhin, daß der Radius des isoperimetrischen Kreises *nicht durch G* verläuft (siehe *Abbildung 3a und b*).

Machen wir, genau wie der Cusaner, einen anderen Versuch: Ziehen wir eine Linie durch einen Punkt H nahe bei B, wobei H diesmal 1/8 der Gesamtstrecke AB von B und um 3/8 der Strecke AB von F entfernt ist, und verlängern MH im Verhältnis HB/AB (= 1/8) oder im Verhältnis FH/AB (= 3/8). In beiden Fällen werden wir sehen, daß die Strecke größer ist als die gesuchte.

Abbildung 3



Bei der Verlängerung der Strecke MG um 1/8 oder 3/8 bleibt diese immer kleiner als der gesuchte isoperimetrische Radius. Wenn man dagegen die Strecke MH um 3/8 bzw. um 1/8 verlängert, so wird sie immer größer als jene werden. Nur die Strecke ME erfüllt die Bedingung: wenn man sie nämlich um 1/4 verlängert, wird sie zum isoperimetrischen Radius. Das liegt daran, daß das Verhältnis GF zur Dreieckseite AB 1/8, das Verhältnis von GB zu Seite AB aber 3/8 beträgt, und ebenso das Verhältnis von HF zur Dreieckseite AB 3/8, das von HB zu AB aber wiederum1/8 ist. Beim Punkt E ist das anders: beide Verhältnisse, sowie das von EF zu Dreieckseite AB als auch das von EB zur Seite AB, ist beidesmal 1/4.

Nun können sich wahrscheinlich schon denken, worauf Nikolaus mit diesem symmetrischen Vorgehen hinauswill, daß er nämlich den gesuchten Schnittpunkt · des isoperimetrischen Radius mit der Dreieckseite genau in der Mitte zwischen F und B vermutet, wo er jeweils um das gleiche Verhältnis 1/4 der Gesamtstrecke AB von F wie von B entfernt ist. Das ist seine Hypothese: Wenn man MX um das gleiche Verhältnis verlängert, erhält man den Radius des isoperimetrischen Kreises.

Wird man daraus nun einen *absolut genauen* Wert für π erhalten? Hören wir, was Nikolaus von Kues über das Thema „Genauigkeit“ in seinem Dialog *Der Laie über den Geist* zu sagen hat:

Redner: „Mit solchen Bestimmungen also, die ein Mehr oder Weniger zulassen, läßt sich kein Begriff von Gott bilden.“

Laie: „Ganz richtig. Da Gott unendlich ist, sind ihm Begriffe um so weniger angemessen, je offener sie ein Mehr oder Weniger zulassen. Deshalb gibt es von diesen her keinen Zugang zum Unendlichen, wie es sich bei der Zahl oder bei der Teilung des Kontinuums feststellen läßt.“

Redner: „Dann gibt es in dieser Welt überhaupt keine Genauigkeit, keine Richtigkeit, Wahrheit, Gerechtigkeit, kein Gutsein, da wir doch aus der Erfahrung wissen, daß eins genauer ist als das andere, eine Abbildung genauer als die andere. Und genau so ist es mit der Richtigkeit, denn eins ist immer richtiger als das andere und eins besser als das andere.“

Laie: „Darin hast du recht. Was mit dem Mehr und Weniger nichts zu tun hat, ist nicht von dieser Welt. Hier findet man nichts, was so genau wäre, daß es nicht noch genauer sein könnte, und nichts so Richtiges, daß es nicht noch richtiger, nichts so Wahres, daß es nicht noch wahrer, nichts so gerechtes, daß es nicht noch gerechter, und nichts so Gutes, daß es nicht noch besser sein könnte. Genauigkeit, Richtigkeit, Wahrheit, Gerechtigkeit, Gutsein, so wie man sie in dieser Welt antreffen kann, sind immer nur ein Teilhaben an jenem Unbedingten, Abbildhaftes zu jenem Urbildlichen. Vom Urbildlichen spreche ich in der Mehrzahl, insofern wir die Verschiedenheit der Dinge in Bezug setzen zur Verschiedenheit ihrer Urgründe. In Wirklichkeit sind sie alle in einem einzigen Urbild, denn im Unbedingten fallen sie zusammen.“ (*Der Laie über den Geist*)

Wenn wir jetzt noch einmal einen Blick auf unser geometrisches Beispiel dieser komplexen Überlegungen werfen, so erkennen wir, daß Nikolaus von Kues alle größeren und weiterführenden philosophischen Überlegungen darin versinnbildlicht hat. Im Aufsuchen des scheinbar unerreichbaren, „unendlich entfernten“ isoperimetrischen Kreises zeigt er uns die Möglichkeit des menschlichen Geistes, dieses Unendliche — soviel es auch dem verstandesmäßigen Denken widerstreben mag — durch einen Prozeß des Vergleichens auf einer höheren Erkenntnisebene zu „ergreifen“. Diese Existenz des Unendlichen als echte, mögliche Größe im menschlichen Kopfe, haben nach ihm zum Beispiel der große Gelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz mit seiner Idee der Infinitesimalrechnung und auch der bedeutende Mathematiker Georg Cantor in seiner „Mannigfaltigkeitslehre“ erwogen.

Nächstes Mal wollen wir in unserem geometrischen Beispiel die Suche nach der Strecke MX, welche verlängert den Radius des isoperimetrischen Kreises anzeigen soll, fortsetzen.