Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 4: Isoperimetrische Vielecke

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises" bzw. die Berechnung der für alle Kreise konstanten Beziehung zwischen ihrem Umfang und Durchmesser.

In unserer Untersuchung der konstanten Beziehung zwischen Kreisumfang und Durchmesser sahen wir letztes Mal, wie sich die Idee des Cusaners, den zu einem Dreieck isoperimetrischen Kreis aufzusuchen, fundamental von den früheren Untersuchungen der Alten oder auch des Archimedes unterscheidet. Nikolaus hatte erkannt, daß diese Untersuchungen nicht zum Ziel führen können, da der natürliche Verstand des Menschen solche extremen Gegensätze nicht zu vereinigen vermag: Einerseits den Kreis, der in jedem beliebig kleinen Bereich gekrümmt ist bzw. eine „Einheit" als krumme Linie ohne Anfang und Ende darstellt, und andererseits die „Vielheit" des Geraden, nämlich Vielecke mit immer mehr Seiten und Ecken.

Solche Widersprüche lassen sich durch verstandesmäßiges Denken allein nicht zusammenbringen; dies gelingt uns nur auf einer „höheren" geistigen Stufe. Aber es ist möglich, und Nikolaus von Kues hat dies in seiner Schrift *Über den Beryll* folgendermaßen begründet:

> „...Ferner mußt du Dir den Satz des Protagoras merken, daß der Mensch das Maß aller Dinge ist. Denn mit den Sinnen mißt der Mensch das sinnlich Wahrnehmbare, mit der Vernunft das Vernunftgemäße, und was über das Vernunftgemäße hinausgeht, erreicht er durch Überschreiten seiner Erkenntniskraft."

Wie aber können wir unsere Erkenntniskraft überschreiten? Hört sich das nicht ein bißchen mystisch an? Das ist es aber ganz und gar nicht! Nikolaus hatte eine hervorragende Idee: Ausgehend vom Dreieck begann er jeweils die einbeschriebenen und umschriebenen Kreise vom Dreieck, dann des zum Dreieck umfangsgleichen regelmäßigen Vierecks, Fünfecks usw. miteinander zu vergleichen, denn...

> „...die Kunst, die ich suche, leistet außer dem in der Geometrie schon Überlieferten die Verwandlung des Gekrümmten in das Gerade und des Geraden in das Gekrümmte. Da zwischen diesen Größen kein rationales Verhältnis bestehen kann, muß sich das Geheimnis hier in einer Koinzidenz der Extreme verbergen. Da diese Koinzidenz im Maximum statthat (wie anderweitig dargetan wird), und das Maximum der unbekannte Kreis ist, wird hier gezeigt, daß sie im Minimum — das ist das Dreieck — aufgesucht werden muß" (*De geometricis transmutationibus*, „Von den geometrischen Verwandlungen").

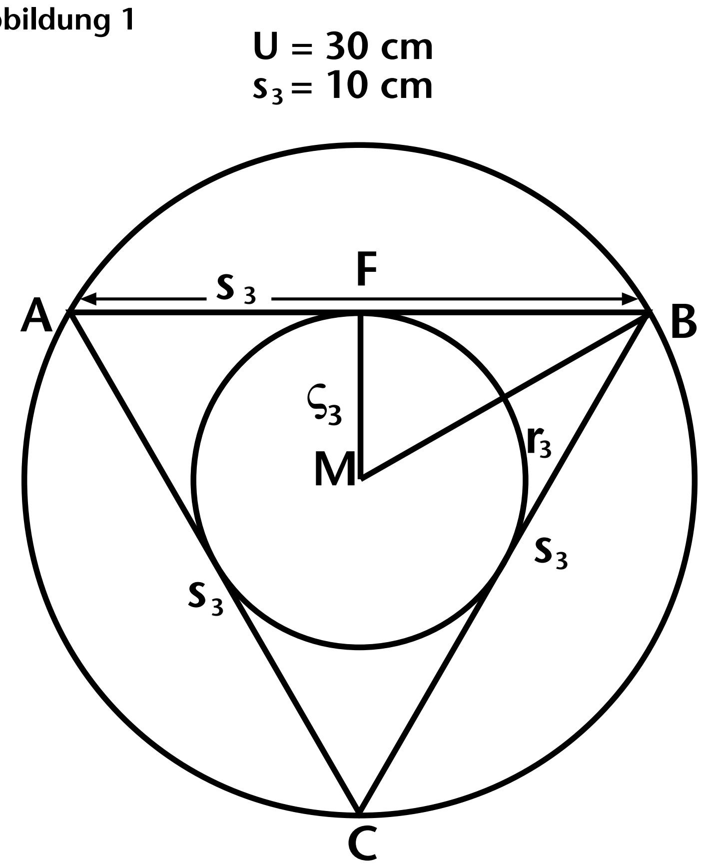
Wenn einem die Möglichkeit des Menschen, seine Erkenntniskraft zu überschreiten, zuerst ein wenig mystisch vorkommt, dann deshalb, weil heute alles, was mit „eigenen" Hypothesen, Vermutungen und Ideen zu tun hat, tunlichst aus Wissenschaft, Politik oder Kunst herausgehalten wird. Die großen Entdeckungen der Geschichte sind aber immer von einzelnen Menschen gemacht worden.

Bei der Betrachtung des Dreiecks mit seinem Umkreis, dessen Radius r_3 gleich dem Abstand vom Mittelpunkt zu einer Ecke ist, und seinem Inkreis, dessen Radius ς_3 gleich dem Abstand vom Mittelpunkt zu einer Seitenmitte ist, hatten wir uns gefragt, wo denn nun der isoperimetrische Kreis zu finden sei: innerhalb der beiden Kreise oder außerhalb (siehe *Abbildung 1*)?

Als nächstes befaßten wir uns mit den Flächen der umfangsgleichen Vielecke, um herauszufinden, ob ihre Flächen bei wachsender Flächenzahl größer oder kleiner werden.

Wie steht es nun mit diesen Flächen? Wir hatten in der letzten Folge von dem Gelehrten Bradwardine erfahren, daß die Fläche eines zum Dreieck isoperimetrischen Vierecks größer ist als die Dreiecksfläche. Wir können getrost annehmen, daß dies auch für das gleichseitige Viereck oder Quadrat gilt. Betrachten wir nun das regelmäßige Viereck, Fünfeck und Sechseck — alle, wohlgemerkt mit dem gleichen Umfang wie das Dreieck in *Abbildung 1*.

Abbildung 1



Das Dreieck mit Inkreis (Radius ς_3) und Umkreis (radius r_3). Die Frage, die Cusa stellt, ist: wo liegt der zum Dreieck umfangsgleiche (isoperimetrische) Kreis?

Am besten wäre es, wenn Sie diese Vielecke einmal selber zeichneten. Nehmen Sie einfach einen Umfang, zum Beispiel 30 cm, und teilen Sie diesen erst in drei Teile für das Dreieck, dann in vier für das Viereck, fünf für das Fünf- und sechs für das Sechseck (*Abbildung 2a-d* — die absoluten Längen erscheinen hier wegen der Platzbeschränkung natürlich in einem anderen Größenverhältnis). Die Dreieckseite s_3 ist also 10 cm lang, die Viereckseite s_4 = 7,5 cm, die Seite s_5 des Fünfecks 6 cm, und die des Sechsecks s_6 = 5 cm.

Zeichnen Sie nun die Verbindungslinien vom Mittelpunkt zu den jeweiligen Ecken unserer Vielecke ein. Wie Sie sehen können, besteht jedes Vieleck aus ebenso vielen kleinen Dreiecken, wie es Seiten hat. Die Verbindungslinien von M zu den Ecken sind auch die Radien der die Vielecke umschreibenden Kreise, der sogenannten Umkreise. Sie sind in einem regelmäßigen Vielecke alle gleich lang. Im Quadrat haben wir r_4, im Fünfeck r_5 und im Sechseck r_6. Für alle weiteren Vielecke können wir den Radius einfach allgemein mit r_n bezeichnen. Da auch die Seiten der regelmäßigen Vielecke jeweils gleich lang sind, haben wir es also in jedem Vieleck mit n kleinen Dreiecken mit den Seiten s_n, r_n und noch einmal r_n zu tun. Die „Höhe" der kleinen Dreiecke ist dabei der Radius des Inkreises des Vielecks, also desjenigen Kreises, auf dessen Umfang alle Mittelpunkte der Seiten des Vielecks liegen. Diesen Inkreisradius bezeichnen wir beim regelmäßigen Viereck mit ς_4, beim Fünfeck mit ς_5, beim Sechseck mit ς_6 usw., allgemein mit ς_n.

Die *Fläche* dieser kleinen Dreiecke läßt sich folgendermaßen ermitteln: Nehmen Sie zuerst die Fläche der durch die Vieleckseite s_n und die Höhe des jeweiligen Dreiecks (das ist der Inkreisradius) ς_n gebildeten Rechtecks (in unserer Abbildung durch gestrichelte Linien gezeichnet). Diese ist doppelt so groß wie die Fläche des kleinen Dreiecks.

Um nun die Fläche des ganzen Vielecks zu erhalten, müssen wir n-mal (beim Viereck viermal, beim Fünfeck fünfmal usw.) die Fläche der kleinen Dreiecke addieren. Die Fläche F_n eines beliebigen isoperimetrischen Vielecks ist also das Produkt aus n halben Rechtecken mit den Seiten ς_n und s_n.

Wenn wir hier beachten, daß der Umfang U für alle Vielecke derselbe ist und mit steigender Seitenzahl in jeweils n immer kleiner werdende Seiten aufgeteilt wird, so bedeutet das: U ist das Produkt aus der Seitenzahl n und der jeweiligen Seitenlänge s_n, also:

$$U = 3 \cdot s_3 = 4 \cdot s_4 = 5 \cdot s_5 \text{ usw.},$$

bzw. allgemein ausgedrückt $U = n \cdot s_n$. Oder noch anders ausgedrückt: $s_n = U/n$. Wir haben auch schon vorher gesehen, daß die Seitenlänge der Vielecke mit steigender Seitenanzahl immer kleiner wird.

Wenn Sie Ihre selbstkonstruierten Vielecke genau betrachten, dann stellen Sie fest, daß die Inkreisradien mit steigender Seitenzahl im Gegensatz zu den kleiner werdenden Seitenlängen immer ein wenig länger werden! Wie ist es aber nun mit den Flächen? Können wir aus der bisherigen Betrachtung schon erkennen, ob die Flächen tatsächlich immer größer werden?

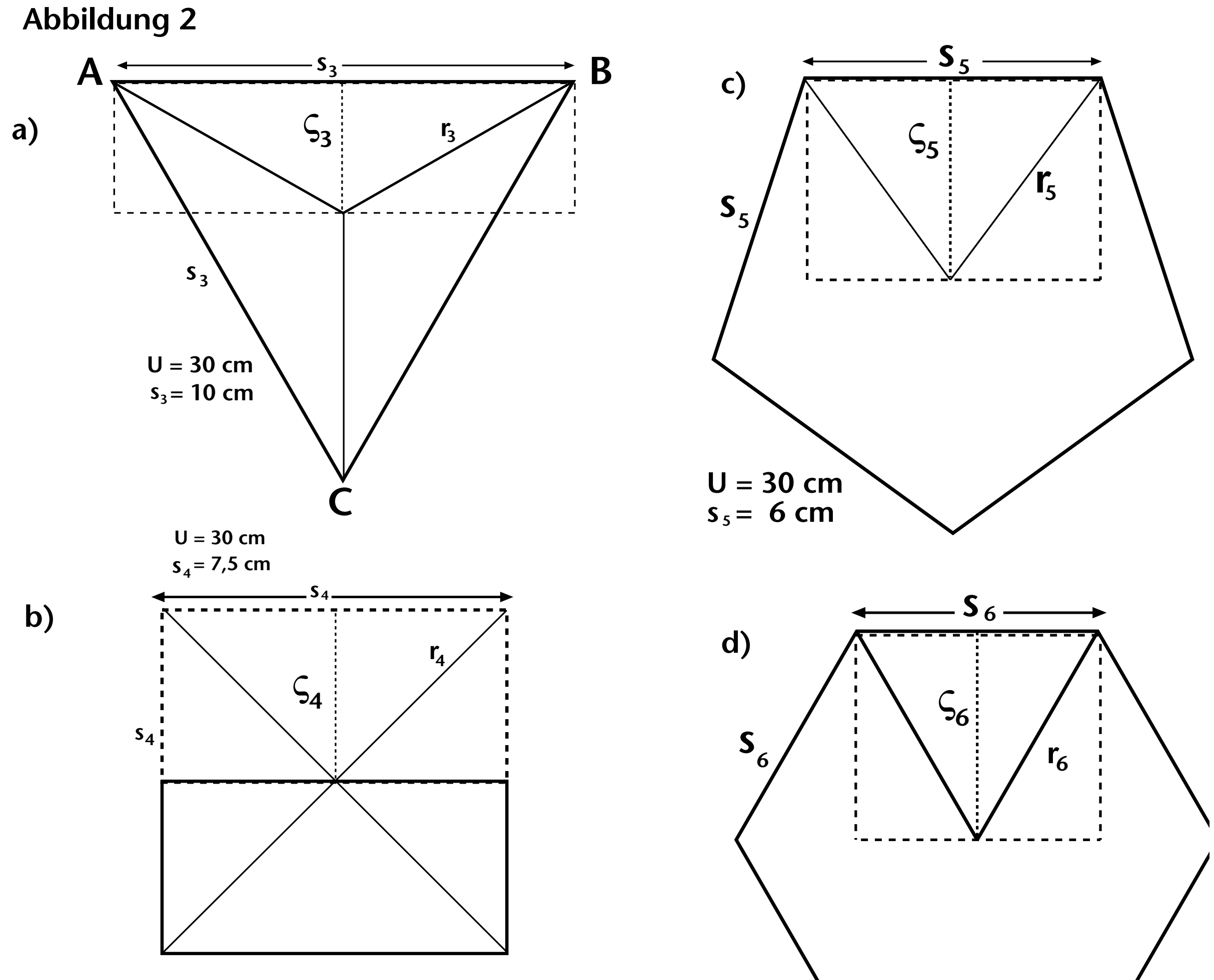
Betrachten wir nun den Prozeß, den Inkreisradius und Umkreisradius mit steigender Anzahl der Seiten der Vielecke durchmachen. Können wir eine Gesetzmäßigkeit erkennen, ohne daß wir bis ins Unendliche Vielecke zeichnen müssen?

Nikolaus Cusanus behauptet, daß der isoperimetrische Kreis dort zwischen In- und Umkreis des Ausgangsdreiecks liegt, wo Inkreis- und Umkreisradius zusammenfallen werden. Außerdem sagt er, daß die Fläche des isoperimetrischen Kreises größer als die Fläche aller isoperimetrischen Vielecke ist. Dabei habe das Dreieck den kleinsten Inkreisradius und den größten Umkreisradius. Die Differenz zwischen Umkreis- und Inkreisradius wird sich immer mehr verringern, bis beide Radien im isoperimetrischen Kreis zusammenfallen. Wenn wir über diesen „unendlichen" Prozeß nachzudenken beginnen, fragen wir uns etwas verwirrt, ob dies wohl jemals eintreten wird? Und wenn, dann wo? Wo liegt das Unendliche...?

Diese Suche nach dem Unendlichen durch einen Prozeß des ständigen Vergleichens der In- und Umkreisradien — immer mit dem letztendlichen Ziel der „Einheit" des Kreises, in dem das Verglichene in eins fällt, vor Augen — hat Nikolaus als den eigentlich *lebendigen Prozeß* des menschlichen Geistes erkannt. Er erklärt dies folgendermaßen in seiner Schrift *De docta ignorantia*:

> „Noch eine weitere Einsicht wollen wir aus dieser Quelle schöpfen: In den Gliedern eines Gegensatzes finden wir ein Mehr und Minder, so beim Einfachen und Zusammengesetzten, beim Abstrakten und Konkreten, beim Formalen und Materialen, beim Vergänglichen und Unvergängli-

Abbildung 2



Die Vieleckflächen kann man dadurch ermitteln, indem man jeweils n-mal die kleinen Dreiecke mit den Seiten s_n und r_n addiert. n repräsentiert dabei die Anzahl der Seiten, also beim Dreieck ist n = 3, beim Viereck 4, beim Fünfeck 5 und so weiter.

> chen usw. Man kommt daher nie zu einem reinen Verhältnis der Gegensätzlichkeit oder zu einem Dritten des Vergleichs, auf das sich die Glieder des Gegensatzes genau beziehen. Alles Entgegengesetzte besitzt also Stufen der Verschiedenheit, indem es vom einen mehr, vom andern weniger hat und den Charakter eines Gliedes des Gegensatzpaares erst dadurch erhöht, daß das eine das andere übertrifft. Hierauf beruht die vernunftgemäße Erforschung der Dinge, daß wir wissen, wie im einen die Zusammensetzung in einer gewissen Einfachheit besteht, im anderen die Einfachheit in der Zusammensetzung, im einen die Vergänglichkeit in Unvergänglichkeit, im anderen umgekehrt usw., wie wir in der Schrift *Über die Vermutungen* breiter ausführen werden."

Und in den *Vermutungen* erklärt er:

> „Der menschliche Geist schließt bei seiner vernunftmäßigen Forschung das Unendliche aus dem Kreis des für ihn Erfaßbaren aus. Für ihn unterscheidet sich kein möglicher Gegenstand von irgendeinem anderen durch einen unendlichen Unterschied. Jeder mögliche Unterschied zwischen Gegenständen ist geringer als ein unendlicher. Im unendlichen Unterschied aber werden Unterschiedenheit und Übereinstimmung gleich, wie man auch den Begriff der Übereinstimmung fassen mag. Ein jegliches Seiendes hat also mit jedem beliebigen anderen Übereinstimmendes und Unterscheidendes, wenn auch nicht in strenger Genauigkeit, die es innerhalb der Welt nicht geben kann..." (*De coniecturis*, „Über die Vermutungen").

Doch während dieses lebendigen Prozesses behält der menschliche Geist immer die Idee der höchsten Einheit, in unserem geometrischen Beispiel verkörpert als der isoperimetrische Kreis. Und dies ist durch eine ganz einfache Idee zu erklären, die sich der Cusaner am Rande seiner Handschrift des Parmenides-Kommentars des Proklos in der Bibliothek von Kues notierte:

> *„Das Eine und die Vielheit sind nicht im Geist, sondern sie sind der Geist; hier ist alles Eines und Vieles zugleich."*

Das nächste Mal wollen wir zusehen, ob wir nicht ein wenig mehr über die Inkreise und Umkreise herausfinden und den Prozeß des „Vergleichens" noch deutlicher machen können.

Korrektur

In der letzten Folge unserer Geometrieserie haben wir eine etwas mißverständliche mathematische Formulierung benutzt. Bei der Herleitung des geometrisches Beispiels von Bradwardine sollte es in der letzten Zeile heißen:

$$\sqrt{3/4}\ s = d.$$

Und für den Umfang des Rechtecks BEDC sollte man besser schreiben:

$$U_4 = 2 \cdot 1/2s + 2 \cdot \sqrt{3/4}\ s$$
$$= s + \sqrt{3}\ s.$$

Das Wurzelzeichen ist sicher viel verständlicher als die Hochzahl 1/2.

Auch dafür, daß die Abbildung 2 aus satztechnischen Gründen etwas verrutscht ist, bitten wir um Nachsicht.

Die Redaktion